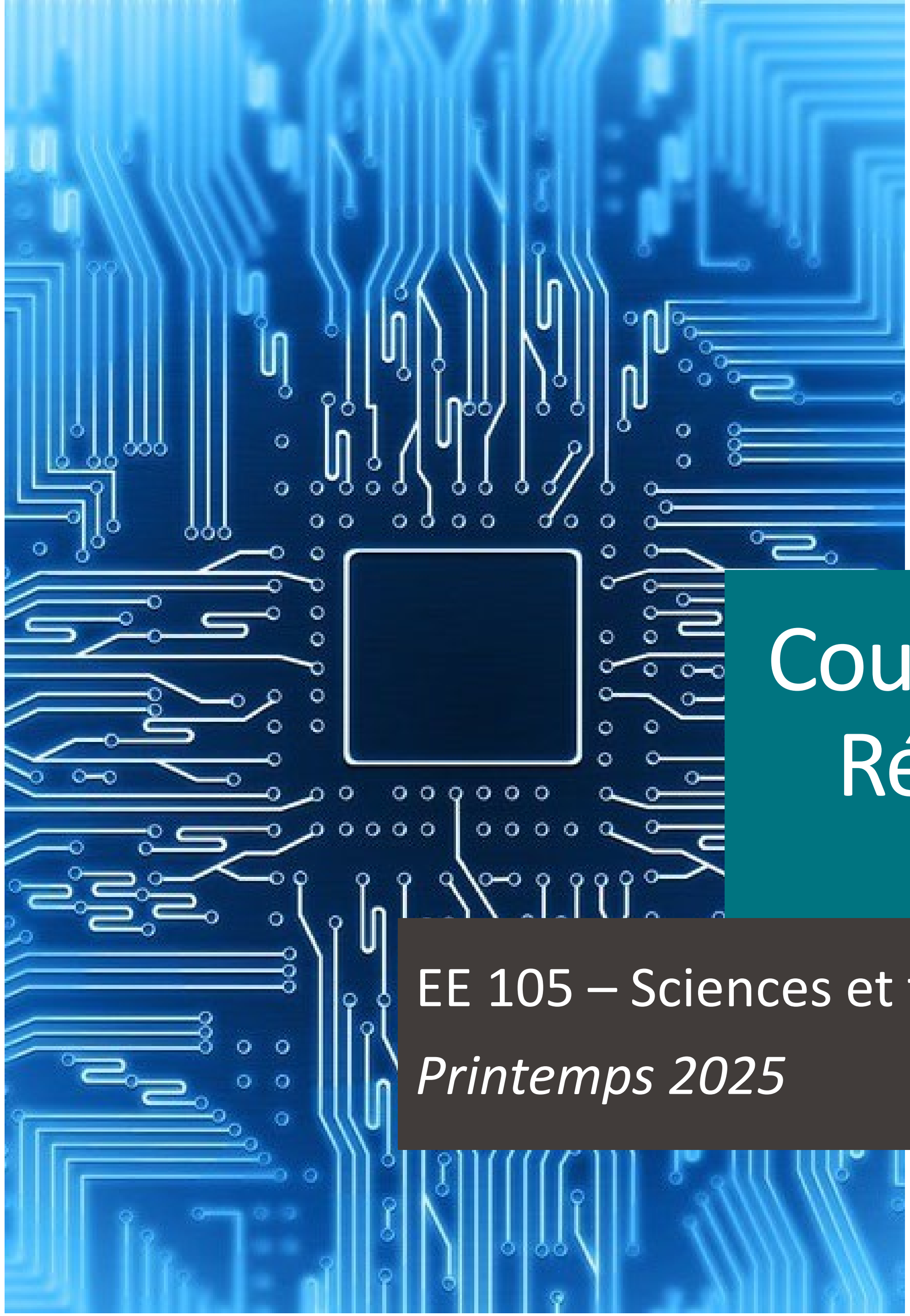


Cours révisions
Régime sinusoïdal monophasé

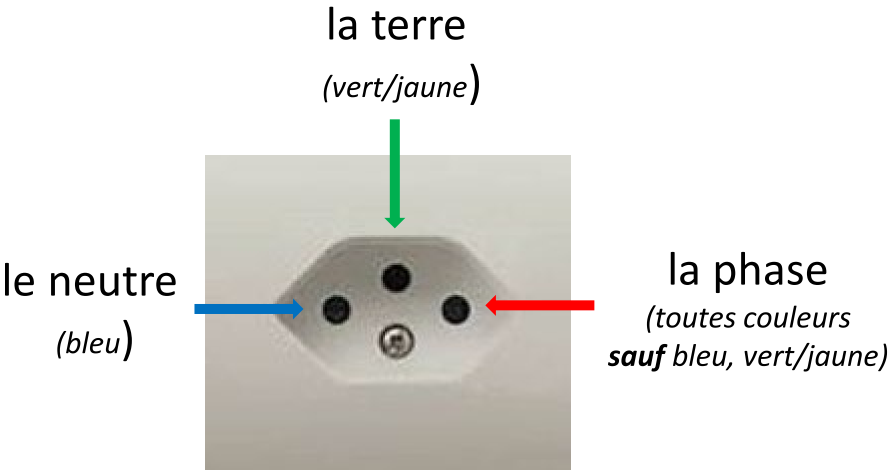
EE 105 – Sciences et technologies de l'électricité

Printemps 2025

Prof. Camille Brès - camille.bres@epfl.ch

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

A la maison...



$$\hat{U} = 325\ \mathrm{V}$$

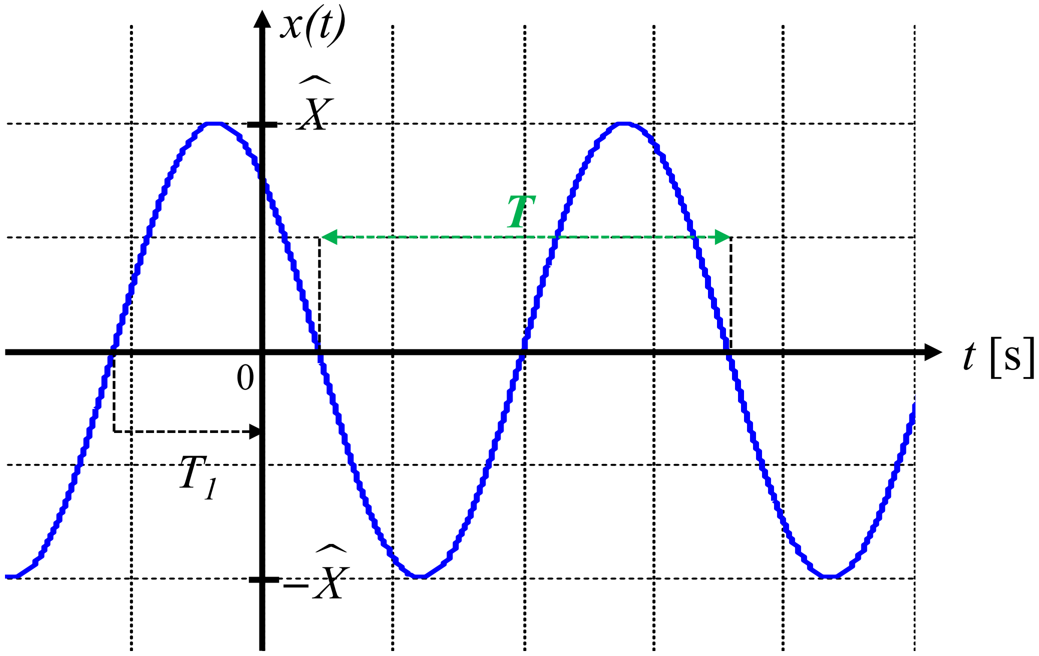
$$U = 230\ \mathrm{V}$$

$$f = \frac{1}{T} = 50\ \mathrm{Hz}$$

Expression analytique

Une grandeur $x(t)$ variant sinusoïdalement en fonction du temps avec une période T est représentée par l'expression générale:

$$x(t) = \hat{X}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right) \text{ pour } -\infty < t < \infty$$



$\hat{X}$ est l'***amplitude***

- Appelé aussi valeur de crête

α est la ***phase initiale*** (pour t = 0)

- Appelée aussi angle de phase

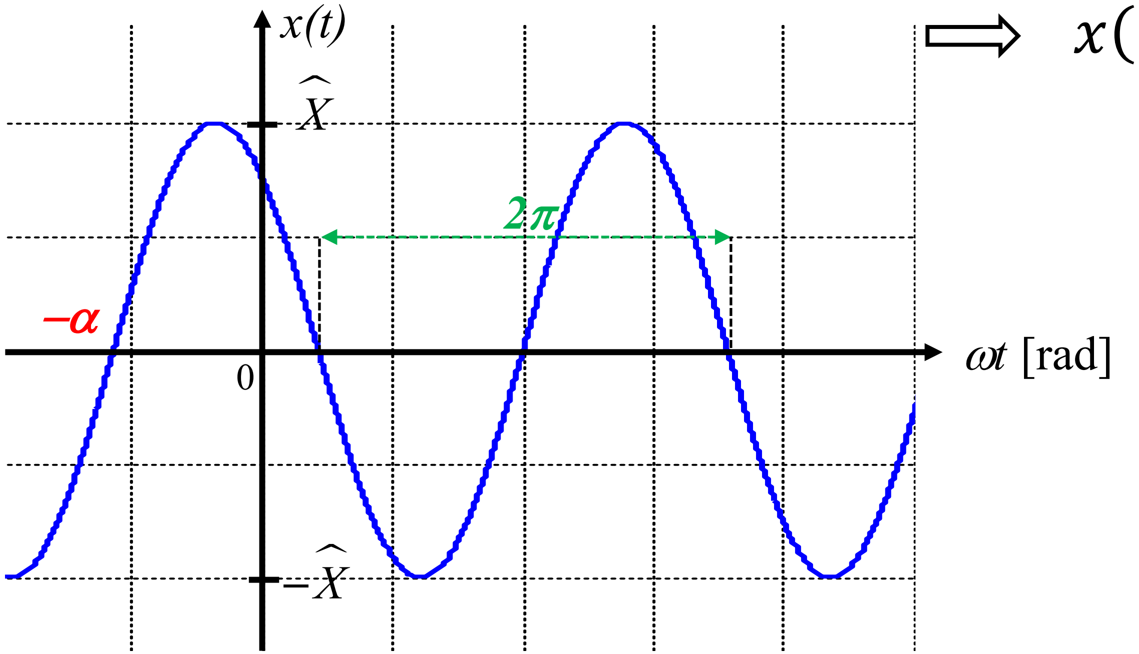
$$\alpha = 2\pi\frac{T_1}{T}$$

$\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right)$ est la **phase instantanée**

Fréquence et pulsation

La fréquence f est l'inverse de la période: $f = \frac{1}{T}$

La pulsation ω est par définition: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$



$\Longrightarrow \quad x(t) = \hat{X}\sin(\omega t + \alpha)$ pour $-\infty < t < \infty$

Circuit linéaire en régime sinusoïdal

Lorsqu'un circuit est constitué d'éléments linéaires et est excité en permanence par une source sinusoïdale, tous les signaux (courants ou tensions) dans le circuit sont sinusoïdaux avec la même période (pulsation)

$$u(t) = \hat{X} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \alpha\right) \quad \Longrightarrow \quad i(t) = \hat{X} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \beta\right)$$

- Les signaux (courants ou tensions) peuvent être différents par l'amplitude et/ou la phase

Le déphasage

On appelle déphasage la différence entre la phase d'une grandeur par rapport à la phase d'une autre grandeur

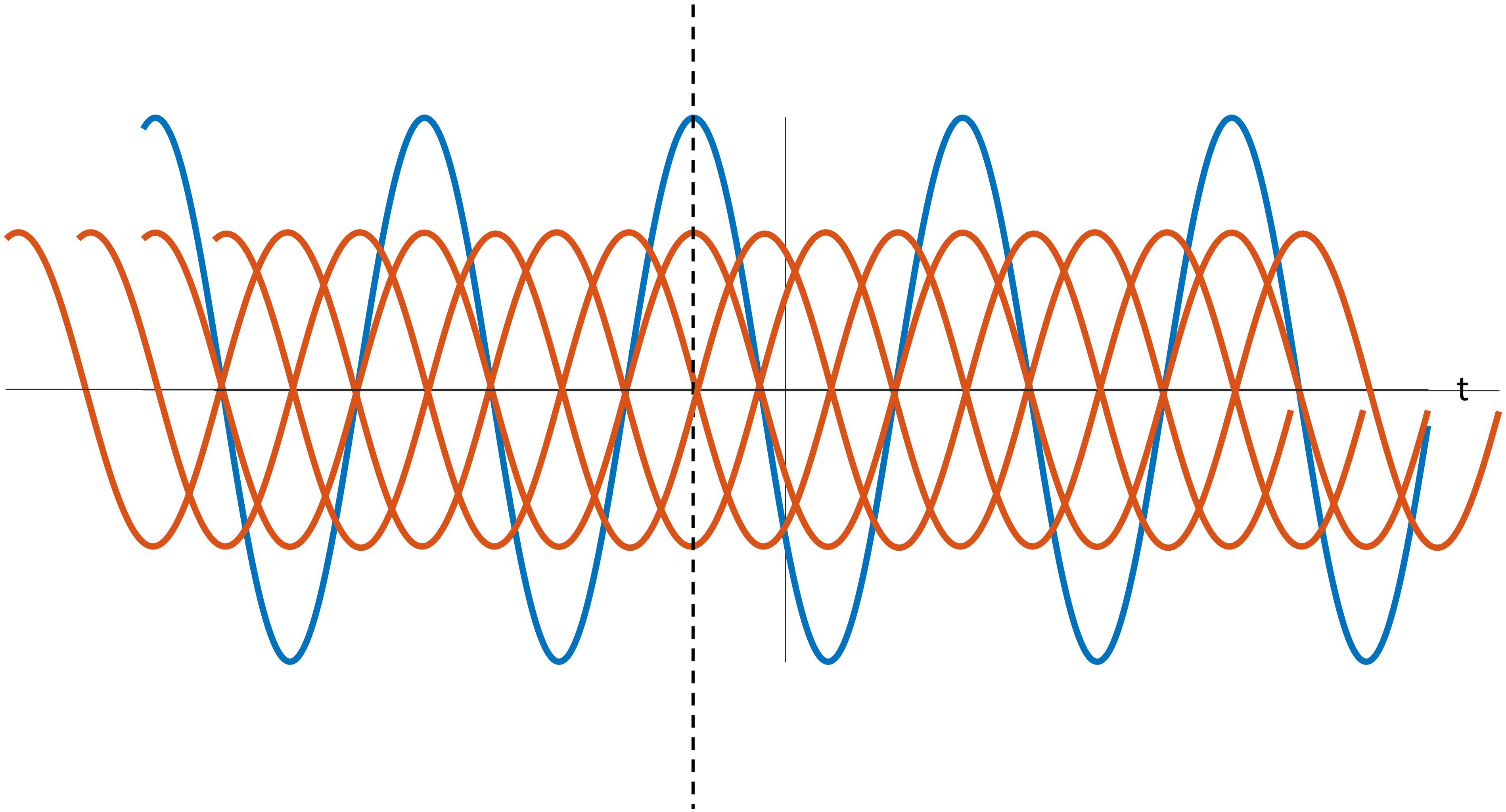
$$a \equiv a(t) = \hat{A}\sin(\omega t + \alpha)$$

$$b \equiv b(t) = \hat{B}\sin(\omega t + \beta)$$

Le déphasage entre grandeur a et grandeur b: $\phi = \alpha - \beta$ (ramené à l'intervalle $(-\pi, \pi)$)

$$\phi \longrightarrow \begin{cases} < 0 & en\ retard \\ > 0 & en\ avance \\ \pm\dfrac{\pi}{2} & en\ quadrature \\ 0 & en\ phase \end{cases}$$

Déphasage



Calcul complexe associé

Forme d'Euler des fonctions complexes:

$$\underline{x} = \hat{X}e^{j(\omega t+\alpha)} = \hat{X}(\cos(\omega t + \alpha) + j\sin(\omega t + \alpha))$$

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega\underline{x} \quad et \int \underline{x}dt = \frac{\underline{x}}{j\omega} = -\frac{j}{\omega}\underline{x}$$

Nous pouvons associer à la fonction cosinus (ou sinus) la fonction homologue complexe:

$$\underbrace{u(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \alpha)}_{\textbf{Valeur instantanée}} \Longrightarrow \underbrace{\underline{u} = \hat{U}e^{j(\omega t+\alpha)}}_{\textbf{Valeur instantanée complexe}}$$

$$u = \mathrm{Re}(\underline{u})$$

Notation

$u = \widehat{U}\cos(\omega t + \alpha)$: valeur instantanée de la tension

$\underline{u} = \widehat{U}e^{j(\omega t+\alpha)}$: valeur instantanée complexe associée

$\underline{\widehat{U}} = \widehat{U}e^{j\alpha}$: le phaseur de crête complexe associé

$\underline{U} = \frac{\underline{\widehat{U}}}{\sqrt{2}} = Ue^{j\alpha}$: le phaseur efficace complexe associé

Les grandeurs dépendant du temps, associées à un circuit sous la même fréquence d'excitation ont la même fréquence: le terme correspondant ($e^{j\omega t}$) peut donc être extrait des calculs

$$u(t) = \widehat{U}\cos(\omega t + \alpha) \implies \underline{U} = Ue^{j\alpha}$$

EPFL

Rappel complexe

Forme exponentielle complexe:

$$\underline{X} = Xe^{j\theta}$$

- Mieux adaptée pour multiplications et divisions

Forme algébrique:

$$\underline{X} = a + jb = X\cos(\theta) + jX\sin(\theta)$$

- Mieux adaptée pour sommes et soustractions

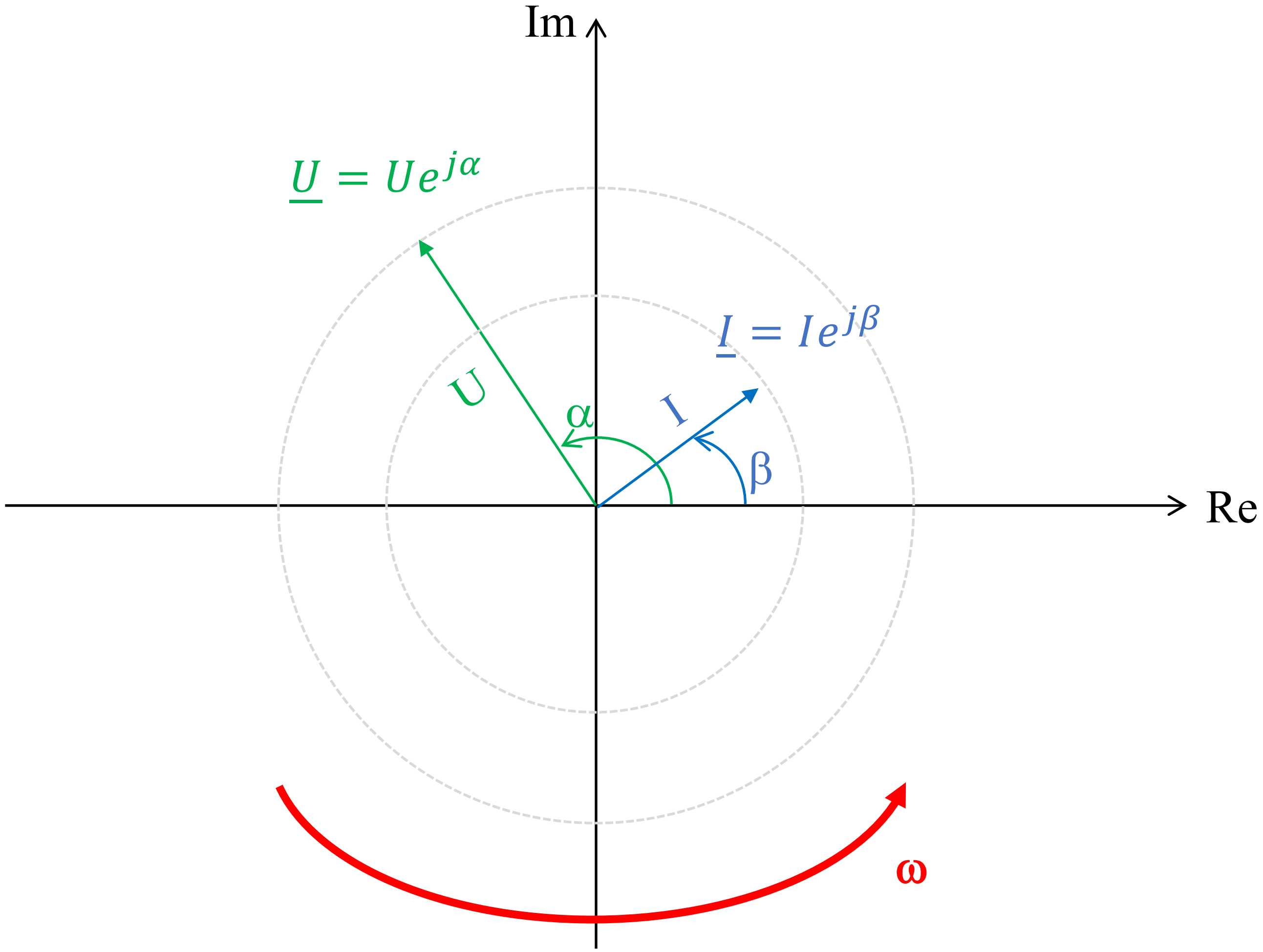
Les 2 formes sont équivalentes et représentent le même nombre complexe

$X = |\underline{X}|$ est le module (nombre réel positif) : $X = \sqrt{Re(|\underline{X}|)^2 + Im(|\underline{X}|)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

θ est l'argument : pour $a \neq 0$, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ mod π

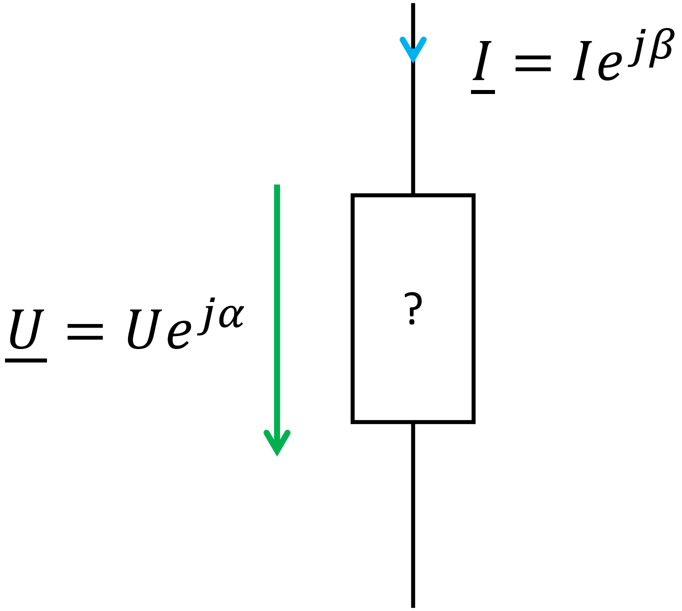
- Si $a > 0$, alors θ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- Si $a < 0$, alors θ est dans $\left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]$
- Si $a = 0$ (imaginaire pur), alors $\theta = \frac{\pi}{2}\ ou \left(-\frac{\pi}{2}\right)$ si $b > 0$ ou $b < 0$

Représentation de Fresnel



Impédance

L'impédance complexe $\underline{Z}$ d'un dipôle associé à une fréquence donnée en régime permanent sinusoïdal est le quotient de la tension par le courant complexe



$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\alpha}}{Ie^{j\beta}} = \frac{U}{I}e^{j(\alpha-\beta)}$$

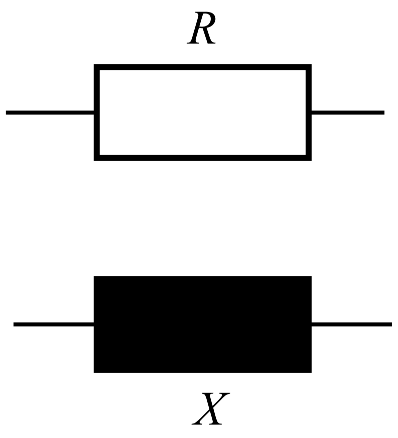
$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi}\begin{cases} Z = \dfrac{U}{I} \\ \varphi = \alpha - \beta \end{cases}$$

L'impédance gère directement le déphasage entre la tension et le courant

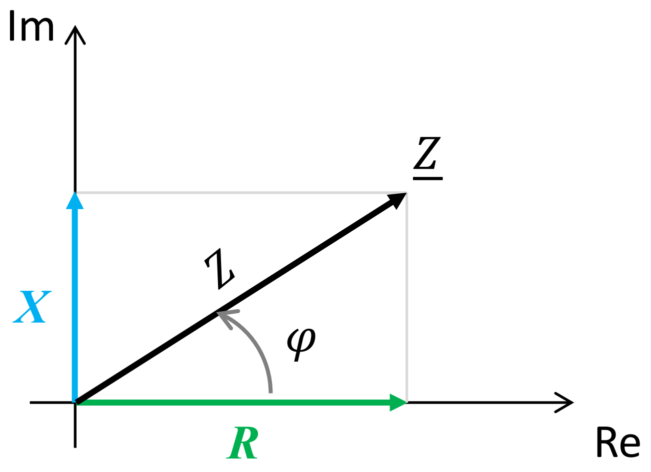
Résistance et réactance

L'impédance est complexe: $\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = Z\cos(\varphi) + jZ\sin(\varphi)$

- La partie réelle est la <u>résistance:</u> $R = Z\cos(\varphi)$
- La partie imaginaire est la <u>réactance</u>: $X = Z\sin(\varphi)$

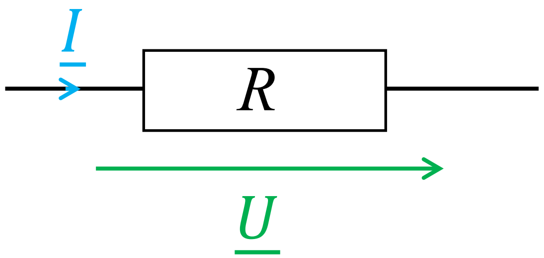


Représentation de l'impédance

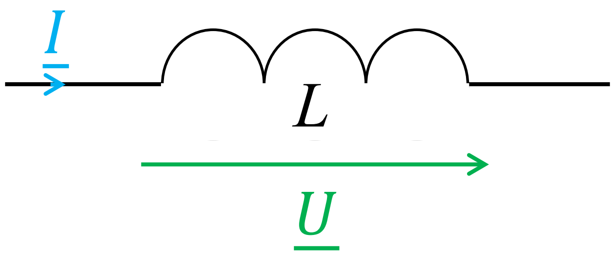


Impédances d'éléments R, L et C

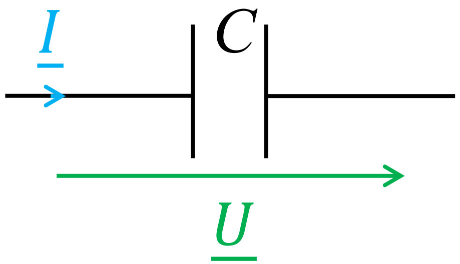
	$\underline{Z}$	$Re(\underline{Z})$	$Im(\underline{Z})$	φ
Résistance *R*	R	R	0	0
Inductance *L*	$j\omega L$	0	ωL	$\frac{\pi}{2}$
Condensateur *C*	$\frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$	0	$-\frac{1}{\omega C}$	$-\frac{\pi}{2}$



$$\underline{U} = R\underline{I}$$



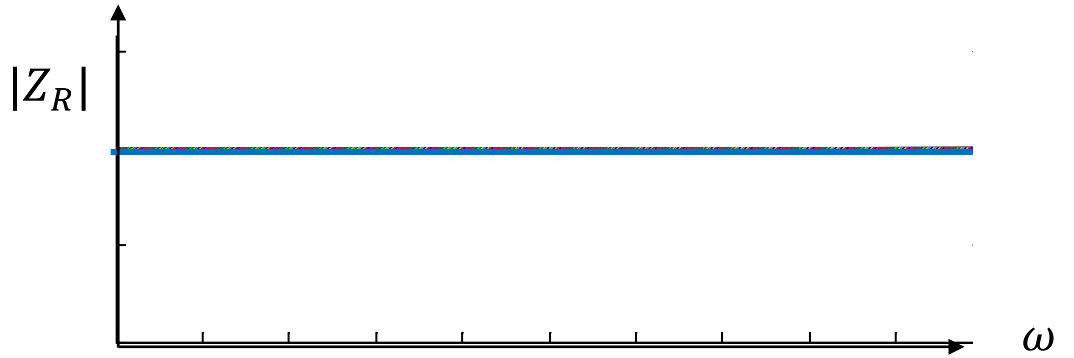
$$\underline{U} = j\omega L\underline{I}$$



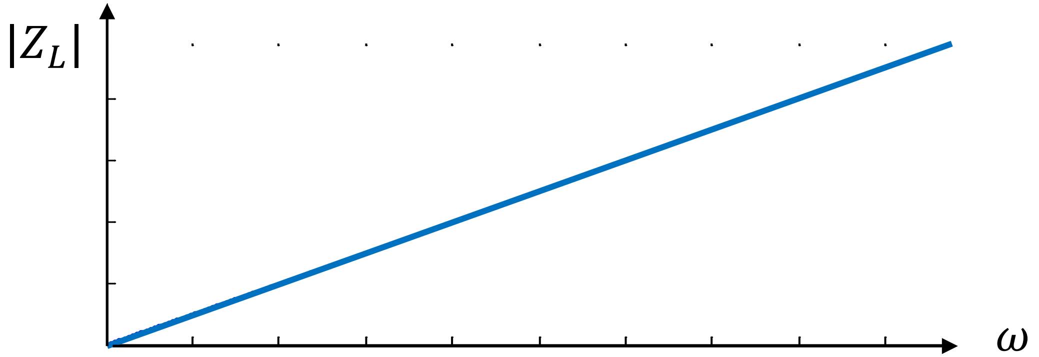
$$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C}\underline{I}$$

Dépendance du module d'impédance sur la fréquence

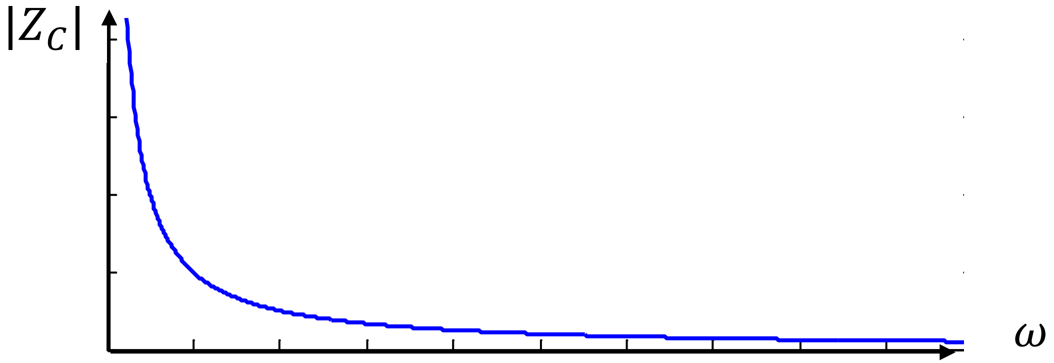
$$\underline{Z}_R = R \Rightarrow |Z_R| = R$$



$$\underline{Z}_L = j\omega L \Rightarrow |Z_L| = \omega L$$



$$\underline{Z}_C = -\frac{j}{\omega C} \Rightarrow |Z_C| = \frac{1}{\omega C}$$



Impédances en série et parallèle

L'impédance équivalente à des impédances en série est la somme des impédances

$$\underline{Z}_S = \sum_{k=1}^{N} \underline{Z}_k$$

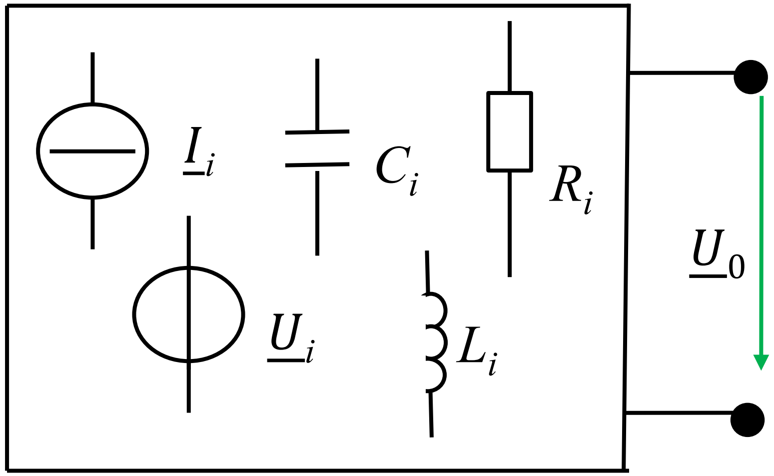
L'inverse de l'impédance équivalente parallèle est la somme des inverses des impédances

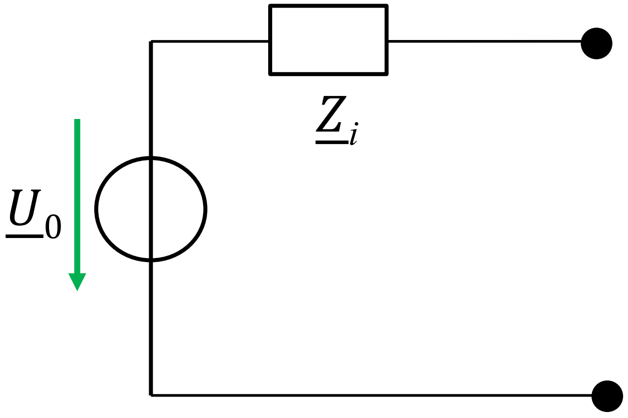
$$\frac{1}{\underline{Z}_P} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\underline{Z}_k}$$

Théorème de Thévenin

Si toutes les sources ont une même fréquence, alors les dipôles peuvent être remplacés par une source de tension réelle $\underline{U}_0$ et une impédance $\underline{Z}_i$

- $\underline{U}_0$: tension à vide (circuit ouvert)
- $\underline{Z}_i$: impédance interne obtenue pour les sources éteintes

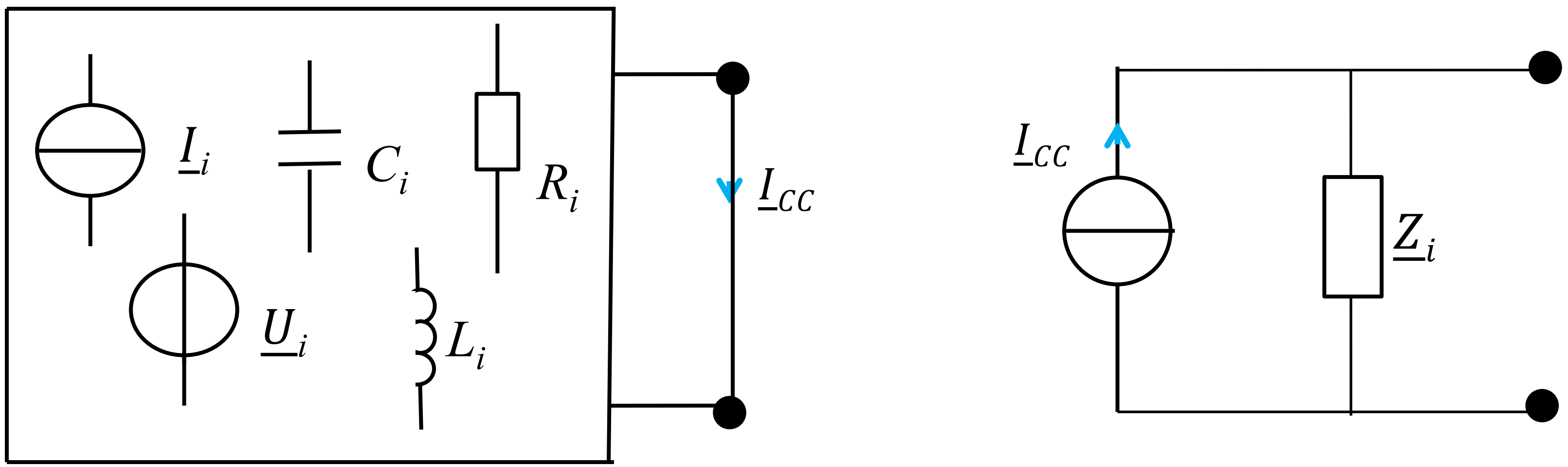




Théorème de Norton

Si toutes les sources ont une même fréquence, alors les dipôles peuvent être remplacés par une source de courant réelle $\underline{I}_{CC}$ et une impédance $\underline{Z}_i$

- $\underline{I}_{CC}$: courant court circuit
- $\underline{Z}_i$: impédance interne obtenue pour les sources éteintes



Principe de Superposition

Si toutes les sources ont une même fréquence,

- alors on considère successivement chaque source isolée
- La valeur totale est la somme vectorielle des contributions individuelles

Si les sources ont des fréquences différentes, alors on traitera le problème par groupes de fréquences égales

- Pulsation ω_1: $\underline{I}_{\omega_1} = I_{\omega_1} e^{j(\phi_{tot1})} = \sum I_k \, e^{j(\phi_k)}$
- Pulsation ω_2: $\underline{I}_{\omega_2} = I_{\omega_2} e^{j(\phi_{tot2})} = \sum I_l \, e^{j(\phi_l)}$
- Total: $\underline{I} = \underline{I}_{\omega_1} + \underline{I}_{\omega_1} = I_{\omega_1} e^{j(\phi_{tot1})} + I_{\omega_2} e^{j(\phi_{tot2})}$
- $i(i) = \sqrt{2} I_{\omega_1} \cos(\omega_1 t + \phi_{tot1}) + \sqrt{2} I_{\omega_2} \cos(\omega_2 t + \phi_{tot2})$

Les filtres

Un filtre en électronique est un circuit qui réalise une opération volontaire de mise en forme d'une grandeur électrique

La caractéristique de base des filtres est accomplie en se servant de ***la fonction de transfert*** du circuit

- Remarque: le filtre peut être considéré comme un quadrupôle

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_{out}(\omega)}{\underline{U}_{in}(\omega)}$$

Filtres - termes importants

Bande passante:

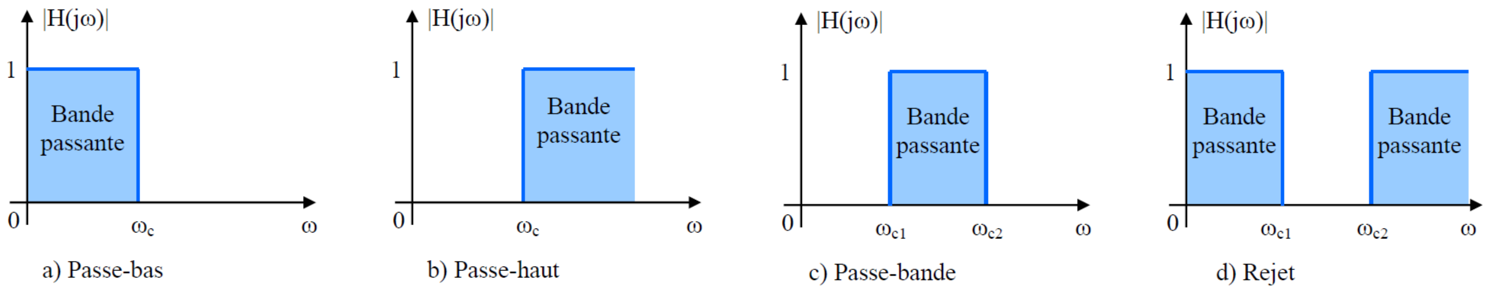
- L'étendue des fréquences entre lesquelles un signal à l'entrée passe à la sortie

Bande atténuée

- L'étendue des fréquences où l'amplitude d'un signal est atténué de sorte qu'il n'apparaît pas à la sortie
- La fréquence de coupure $f_c = \omega_c/2\pi$ sépare la bande passante de la bande atténuée

Les filtres sont caractérisés selon leur réponse en fréquence

- La variation de l'amplitude est le critère le plus important



Fréquence/pulsation de coupure (fréquence quadrantale) $f_c = \omega_c/2\pi$

Pour les filtres réels, elle est la fréquence/pulsation à laquelle l'amplitude de la fonction de transfert est à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de la valeur maximale

$$|H(\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{max}$$

- A cette pulsation la puissance est diminuée de moitié

Pour un filtre RL (RC), la fréquence de coupure est la fréquence pour laquelle la valeur de la réactance est égale à R

- On peut donc choisir la fréquence de coupure en faisant un choix approprié de valeur de résistance, inductance et/ou capacité

Filtre passe bande passif

Ils ont 2 pulsations de coupure ω_{c1} et ω_{c2}

Pulsation centrale (de résonance) ω_0 est la moyenne géométrique des pulsations de coupure

- la fonction de transfert du filtre $\underline{H}(\omega)$ est alors purement réelle (les impédances s'annulent)

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}$$

Largeur de bande $\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1}$

Facteur de qualité Q: le rapport entre la fréquence centrale et la largeur de bande, $Q = \omega_0 / \beta$

- Mesure de la largeur de la bande passante indépendamment de la fréquence centrale

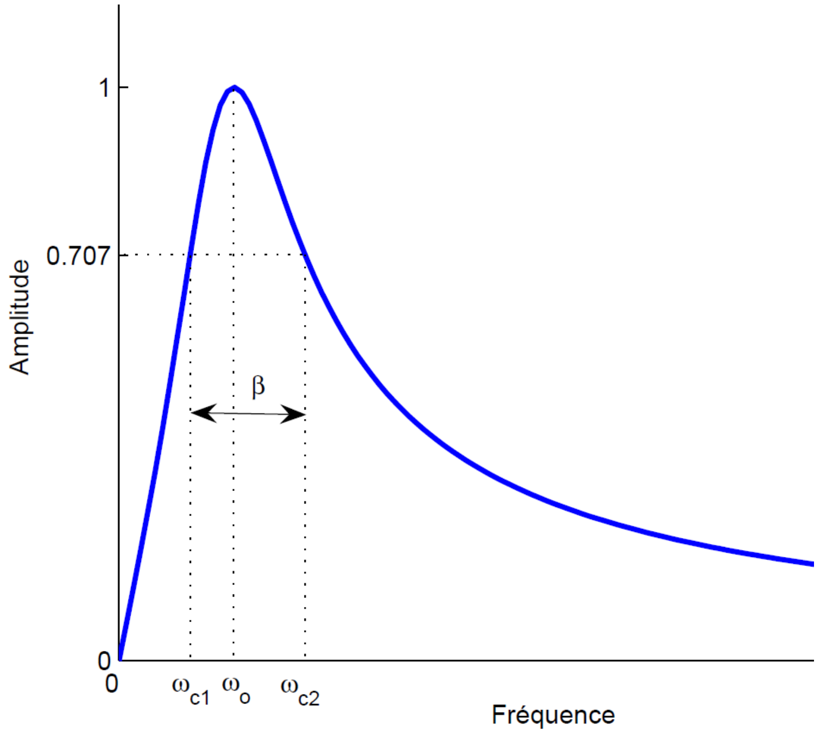


Diagramme de Bode

Un diagramme de Bode permet de représenter les variations de gain et de phase d'un signal de sortie par rapport à un signal d'entrée, en fonction de la fréquence.

Le gain en dB d'une fonction de transfert $H(j\omega)$: $G_{dB} = 20\log_{10}[|H(\omega)|]$

La phase en degré est $\phi = \arg[H(\omega)]$

On utilise le tracé asymptotique et les points caractéristiques (tel que les fréquences de coupure) pour faire le diagramme

Puissance

La valeur instantanée de la puissance est par définition: $p(t) = u(t)i(t)$

En régime sinusoïdal, la puissance active (puissance moyenne)est: $P = UI\cos(\phi)$ $[\mathrm{W}]$

- ϕ : déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$
- Maximale pour charge purement résistive
- Nulle pour charge purement réactive

En régime sinusoïdal, la puissance réactive est: $Q = UI\sin(\phi)$ $[\mathrm{var}]$

- Puissance réactive absorbée pour charge inductive ($Q > 0$)
- Puissance réactive fournie pour charge capacitive ($Q < 0$)

La puissance apparente est: $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI$ $[\mathrm{VA}]$

La puissance complexe est: $\underline{S} = P + jQ = UI\cos(\phi) + jUI\sin(\phi) = S\exp(j\phi)$

Le facteur de puissance est $\cos(\phi)$: si en retard alors $\phi > 0$, si en avance alors $\phi < 0$

Examen final du Jeudi 26 Juin 2025

Salle CM 1 121 (emplacement assigné), 9h15 – 12h15

Ne pas écrire pas au crayon

Autorisés:

- Notes de cours et diapositives du cours, livre
- Calculatrice, stylos, règle etc
- Le papier brouillon est fourni
- N'oubliez pas votre Camipro
- Les sacs sont à déposer au bas de l'amphi avant le début de l'épreuve

Non autorisés

- Séries et leurs corrigés
- Ordinateurs, tablettes, téléphones

Prendre le temps de bien lire l'énoncé, regarder toutes les questions avant de commencer

- Montrer tous les développements (schémas, calculs, variables introduites etc) et indiquer les réponses clairement

Vous devez rendre tous les documents (examens + papiers brouillon)